

PROBLEMS IN ELEMENTARY NUMBER THEORY 1 (2008) NO. 1

PROBLEMS IN BANGLA

1. $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ দ্বারা ধনাত্মক সংখ্যার সেট প্রকাশ করলে, এমন সব ফাংশন $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ বের কর যাতে সব $m, n \in \mathbb{N}$ এর জন্য, $f(2) = 2$, $f(mn) = f(m)f(n)$, $f(n+1) > f(n)$ হয়।

[K 12] Canada 1969

2. প্রমাণ কর যে, এমন কোন পূর্ণসংখ্যা x, y নেই যারা $x^2 = y^5 - 4$ সমীকরণটি সিদ্ধ করে।

[H 15] Balkan Mathematical Olympiad 1998

3. মনে করি $M = \{1, 2, \dots, n\}$ সেটটিকে t সংখ্যক নিশ্চেছদ সাবসেট M_1, \dots, M_t তে বিভক্ত করা হল। যদি $n \geq [t! \cdot n]$ হয়; তবে দেখাও যে, অন্তত একটি সাবসেট M_z -এ এমন তিনটি উপদান x_i, x_j, x_k থাকবে যাতে $x_i - x_j = x_k$ হয়।

[O 53] Schur Theorem

4. যদি $p, 4k + 1$ আকারের কোন মৌলিক সংখ্যা হয় তবে দেখাও যে,

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left(\left\lfloor \frac{2i^2}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{i^2}{p} \right\rfloor \right) = \frac{p-1}{2}$$

[I 11] Korea 2000

5. (a) যদি $d(n)$ দ্বারা কোন সংখ্যা n এর ধনাত্মক উৎপাদকগুলোর সংখ্যা বোঝানো হয়; তবে প্রমাণ কর যে $d(n^2 + 1)$ ধারাটি যে কোন সংখ্যা থেকে শুরু করে স্ট্রিকটলি মনোটনিক নয়।

(b) প্রমাণ কর যে $d((n^2 + 1)^2)$ ধারাটি যে কোন সংখ্যা থেকে শুরু করে মনোটনিক নয়।

[J 11] Saint-Peterburg, 1998

6. a এবং b এমন দুটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা যাতে $a^2 + b^2, ab + 1$ দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য। দেখাও যে,

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

একটি পূর্ণসংখ্যার বর্গ।

[A 3] IMO 1988/6

7. p একটি মৌলিক সংখ্যা হলে, প্রমাণ কর যে,

$$\sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}.$$

[D 2] Putnam 1991/B4

8. n একটি মৌলিক সংখ্যা এবং $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ কিছু ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, প্রমাণ কর যে, a_1, a_2, \dots, a_n একটি সমান্তর ধারা হবে যদি এবং কেবল যদি $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ সেটটিকে n টি সেট A_1, A_2, \dots, A_n -এ বিভক্ত করা যায় যাতে,

$$a_1 + A_1 = a_2 + A_2 = \dots = a_n + A_n, \text{ হয়; [যেখানে } x + A = \{x + a \mid a \in A\}]$$

[O35] Romania TST 1998

9. মনে করি, m এর কোন প্রিমিটিভ রুট নেই। দেখাও যে, m এর সকল সহমৌলিক সংখ্যা a এর জন্য

$$a^{\frac{\varphi(m)}{2}} \equiv 1 \pmod{m}$$

[B6]

10. সকল পাঁচ অঙ্কের সংখ্যার সেট বিবেচনা কর যাদের অঙ্কগুলো হল 1, 2, 3, 4, 5 অঙ্কগুলোর বিন্যাস (পারমুটেশন)। প্রমাণ কর যে, এই সেটটিকে এমন দুইটি শ্রেণীতে ভাগ করা যাবে যাতে করে একটি শ্রেণীর সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি অপর শ্রেণীর সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টির সমান।

[O 49] (D. Fomin) [Ams, pp. 12]