

PROBLEMS IN ELEMENTARY NUMBER THEORY 1 (2008) NO. 1

PROBLEMS IN BOSNIAN

1. Neka je sa  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  označen skup prirodnih brojeva. Naći sve funkcije  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  takve da za sve  $m, n \in \mathbb{N}$ :  $f(2) = 2$ ,  $f(mn) = f(m)f(n)$ ,  $f(n+1) > f(n)$ .

[K12] Kanada 1969

2. Dokazati da ne postoje cijeli brojevi  $x$  i  $y$  takvi da je  $x^2 = y^5 - 4$ .

[H15] Balkanijada 1998

3. Skup  $M = \{1, 2, \dots, n\}$  je podijeljen na  $t$  disjunktih podskupova  $M_1, \dots, M_t$ . Ako je  $n \geq [t! \cdot e]$ , pokazati da tada bar jedan podskup  $M_z$  sadrži tri elementa  $x_i, x_j, x_k$  takva da je  $x_i - x_j = x_k$ .

[O53] Schurova teorema

4. Neka je  $p$  prost broj oblika  $4k + 1$ . Pokazati da je

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left( \left[ \frac{2i^2}{p} \right] - 2 \left[ \frac{i^2}{p} \right] \right) = \frac{p-1}{2}.$$

[I11] Koreja 2000

5. (a) Neka je sa  $d(n)$  označen broj pozitivnih djelilaca broja  $n$ . Dokazati da ne postoji broj  $N \in \mathbb{N}$  takav da je niz  $d(n^2 + 1)$  strogo monoton za  $n \geq N$ .  
(b) Dokazati da ne postoji broj  $N \in \mathbb{N}$  takav da je niz  $d(n^2 + 1)$  monoton za  $n \geq N$ .

[J11] Sankt Petersburg, 1998

6. Neka su  $a$  i  $b$  prirodni brojevi takvi da  $ab + 1$  dijeli  $a^2 + b^2$ . Dokazati da je

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

potpun kvadrat.

[A3] IMO 1988/6

7. Neka je  $p$  neparan prost broj. Dokazati da je

$$\sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}.$$

[D2] Putnam 1991/B4

8. Neka je  $n$  prost i neka su  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  cijeli brojevi. Dokazati da je  $a_1, a_2, \dots, a_n$  aritmetički niz ako i samo ako postoji podjela skupa  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$  na  $n$  skupova  $A_1, A_2, \dots, A_n$  takvih da je

$$a_1 + A_1 = a_2 + A_2 = \dots = a_n + A_n,$$

gdje je  $x + A = \{x + a \mid a \in A\}$ .

[O35] Rumunija 1998

9. Neka broj  $m$  nema primitivni korijen. Dokazati da je

$$a^{\frac{\varphi(m)}{2}} \equiv 1 \pmod{m}$$

za svaki broj  $a$  koji je relativno prost sa  $m$ .

[B6]

10. Dokazati da je skup svih petocifrenih brojeva čiji je decimalni prikaz permutacija cifara 1, 2, 3, 4, 5 moguće podijeliti na dva podskupa, takva da je suma kvadrata elemenata u svakom od njih jednaka.

[O49] D. Fomin, [Ams, pp. 12]