PROBLEMS IN ELEMENTARY NUMBER THEORY 1 (2008) NO. 1

Problems in Chinese

1. $\mathbb{N}=\{1,2,3,\cdots\}$ 表示正整数集合。 求所有 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 使得对所有 $m,n\in\mathbb{N}$: $f(2)=2$, $f(mn)=f(m)f(n)$, $f(n+1)>f(n)$。

[K12] 加拿大 1969

2. 求证不存在整数 x,y 满足 $x^2=y^5-4$。

[H15] 巴干尔 1998

3. 集合 $M=\{1,2,\ldots,n\}$ 被分成 t 个互不相交的子集 $M_1,\ldots,M_t$. 求证：如果 $n\geq\lfloor t!\cdot e\rfloor$ 则至少存在一个 M_z 使其中三个元素 x_i,x_j,x_k 满足 $x_i-x_j=x_k$.

[O53] Schur 定理

4. 令 p 为一个可以表示成 $4k+1$形势的质数. 求证：

$$\sum_{i=1}^{p-1}\left(\left\lfloor\frac{2i^2}{p}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{i^2}{p}\right\rfloor\right)=\frac{p-1}{2}.$$

[I11] 韩国 2000

5.
(a) 令 $d(n)$ 为 n 的正因子数. 求证：不存在 n_0 使得对所有$n>n_0$ 数列 $d(n^2+1)$严格递增。
(b) 不存在 n_0 使得对所有$n>n_0$ 数列 $d(n^2+1)^2$严格递增。

[J11] 圣彼得堡 1998

6. 令 ab 为正整数使得 $ab+1$ 整除 a^2+b^2。求证：

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

是一个完全平方数。

[A3] 国际数学奥林匹克 1988/6

7. 令 p 为给定的奇素数。求证：

$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}\equiv 2^p+1 \pmod{p^2}\text{”}$$

[D2] 普特南 1991/B4

8. 令 n 为素数， $a_1<a_2<\ldots<a_n$ 为整数。 求证： $a_1,a_2,\ldots,a_n$ 是等差数列当切仅当集合 $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots,\}$ 可以分成 n 个子集 $A_1,A_2,\ldots,A_n$ 使得

$$a_1+A_1=a_2+A_2=\ldots=a_n+A_n,$$

其中 $x+A=\{x+a|a\in A\}$.

[O35] 罗马尼亚 1998

9. 假设 m 没有原根。 求证：对任意 a

$$a^{\frac{\varphi(m)}{2}}\equiv 1 \pmod{m}$$

与 m 互质。

[B6]

10. 求证：所有各个数位是1，2，3，4，5 的排列的五位数所组成的集合可以被分成两个子集使得 各子集的平方和相等。

[O49] D. Fomin, [Ams, pp. 12]