PROBLEMS IN ELEMENTARY NUMBER THEORY 1 (2008) NO. 1

Problems in Croatian

1. *Neka je sa* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ *označen skup prirodnih brojeva. Naći sve funkcije* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *takve da za sve* $m, n \in \mathbb{N}$*:* $f(2) = 2$, $f(mn) = f(m)f(n)$, $f(n+1) > f(n)$.

[K12] Kanada 1969

2. *Dokazati da ne postoje cijeli brojevi* x *i* y *takvi da je* $x^2 = y^5 - 4$.

[H15] Balkanijada 1998

3. *Skup* $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ *je podijeljen na* t *disjunktnih podskupova* $M_1, \ldots, M_t$. *Ako je* $n \geq \lfloor t! \cdot e \rfloor$ *, pokazati da tada bar jedan podskup* M_z *sadrži tri elementa* x_i, x_j, x_k *takva da je* $x_i - x_j = x_k$.

[O53] Schurov teorem

4. *Neka je* p *prost broj oblika* $4k + 1$. *Pokazati da je*

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left(\left\lfloor \frac{2i^2}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{i^2}{p} \right\rfloor \right) = \frac{p-1}{2}.$$

[I11] Koreja 2000

5.
(a) *Neka je sa* $d(n)$ *označen broj pozitivnih djelitelja broja* n. *Dokazati da ne postoji broj* $N \in \mathbb{N}$ *takav da je niz* $d(n^2 + 1)$ *strogo monoton za* $n \geq N$.
(b) *Dokazati da ne postoji broj* $N \in \mathbb{N}$ *takav da je niz* $d(n^2 + 1)$ *monoton za* $n \geq N$.

[J11] Sankt Petersburg, 1998

6. *Neka su* a *i* b *prirodni brojevi takvi da* $ab + 1$ *dijeli* $a^2 + b^2$. *Dokazati da je*

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

potpun kvadrat.

[A3] IMO 1988/6

7. *Neka je p neparan prost broj. Dokazati da je*

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}.$$

[D2] Putnam 1991/B4

8. *Neka je n prost i neka su $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ cijeli brojevi. Dokazati da je $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aritmetička progresija ako i samo ako postoji podjela skupa $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots,\}$ na n skupova $A_1, A_2, \ldots, A_n$ takvih da je*

$$a_1 + A_1 = a_2 + A_2 = \ldots = a_n + A_n,$$

gdje je $x + A = \{x + a | a \in A\}$.

[O35] Rumunjska 1998

9. *Neka broj m nema primitivni korijen. Dokazati da je*

$$a^{\frac{\varphi(m)}{2}} \equiv 1 \pmod{m}$$

za svaki broj a koji je uzajamno prost sa m.

[B6]

10. *Dokazati da je skup svih petznamenkastih brojeva čiji je decimalni prikaz permutacija znamenki $1, 2, 3, 4, 5$ moguće podijeliti na dva podskupa, takva da je zbroj kvadrata elemenata u svakom od njih jednak.*

[O49] D. Fomin, [Ams, pp. 12]