PROBLEMS IN ELEMENTARY NUMBER THEORY 1 (2008) NO. 1

Problems in Greek

1. *Συμβολίζουμε με* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ *το σύνολο των θετικών ακεραίων. Βρείτε όλες τις συναρτήσεις* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *έτσι ώστε για κάθε* $m, n \in \mathbb{N}$: $f(2) = 2$, $f(mn) = f(m)f(n)$, $f(n+1) > f(n)$.

[K12] Canada 1969

2. *Αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν ακέραιοι* x *και* y *που να ικανοποιούν τη σχέση* $x^2 = y^5 - 4$.

[H15] Balkan Mathematical Olympiad 1998

3. *Έστω ότι το σύνολο* $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ *διαμερίζεται σε* t *ξένα μεταξύ τους υποσύνολα* $M_1, \ldots, M_t$. *Δείξτε ότι αν* $n \geq \lfloor t! \cdot e \rfloor$ *τότε υπάρχει τουλάχιστον μία κλάση της διαμέρισης* M_z *η οποία περιέχει τρία στοιχεία* x_i, x_j, x_k *που ικανοποιούν τη σχέση* $x_i - x_j = x_k$.

[O53] Schur Theorem

4. *Έστω* p *ένας πρώτος αριθμός της μορφής* $4k + 1$. *Δείξτε ότι*

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left(\left\lfloor \frac{2i^2}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{i^2}{p} \right\rfloor \right) = \frac{p-1}{2}.$$

[I11] Korea 2000

5. (α) *Έστω ότι με* $d(n)$ *συμβολίζουμε το πλήθος των θετικών διαιρετών του αριθμού* n.*Αποδείξτε ότι η ακολουθία* $d(n^2+1)$ *για κάποιο* n_0 *και* $n \geq n_0$ *δεν είναι γνησίως μονότονη.*

(β) *Δείξτε ότι η ακολουθία* $d((n^2+1)^2)$ *δεν είναι μονότονη από κάθε δοσμένο σημείο και μετά.*

[Θ11] Saint-Peterburg, 1998

6. *Έστω a και b θετικοί ακέραιοι και τέτοιοι ώστε ο αριθμός $ab+1$ να διαιρεί τον a^2+b^2. Δείξτε ότι ο αριθμός*
$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$
είναι τετράγωνο ακεραίου αριθμού.

[A3] IMO 1988/6

7. *Έστω p ένας περιττός πρώτος. Δείξτε ότι*
$$\sum_{j=0}^{p}\binom{p}{j}\binom{p+j}{j}\equiv 2^p+1 \pmod{p^2}.$$

[Δ2] Putnam 1991/B4

8. *Έστω n ένας πρώτος αριθμός και έστω ότι οι $a_1<a_2<\ldots<a_n$ είναι ακέραιοι. Δείξτε ότι οι $a_1,a_2,\ldots,a_n$ αποτελούν αρηθμητική πρόοδο αν και μόνο αν υπάρχει διαμέριση του συνόλου $\mathbb{N}_0=\{0,1,2,\ldots,\}$ σε n σύνολα $A_1,A_2,\ldots,A_n$ έτσι ώστε*
$$a_1+A_1=a_2+A_2=\ldots=a_n+A_n,$$
όπου $x+A=\{x+a|a\in A\}$.

[O35] Romania TST 1998

9. *Υποθέτουμε ότι ο m δεν έχει πρωταρχική ρίζα . Δείξτε ότι*
$$a^{\frac{\varphi(m)}{2}}\equiv 1 \pmod{m}$$
για κάθε a ο οποίος είναι σχετικά πρώτος με τον m.

[B6]

10. *Θεωρούμε το σύνολο των πενταψήφιων αριθμών των οποίων η δεκαδική αναπαράσταση είναι μια μετάθεση των ψηφίων $1,2,3,4,5$. Αποδείξτε ότι το παραπάνω σύνολο μπορεί να χωριστεί σε δύο σύνολα έτσι ώστε το άθροισμα των τετραγώγων των αριθμών στα δύο σύνολα να είναι το ίδιο.*

[O49] D. Fomin, [Ams, pp. 12]