PROBLEMS IN ELEMENTARY NUMBER THEORY 1 (2008) NO. 1

Problems in Serbian

1. *Нека је са* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ *означен скуп природних бројева. Наћи све функције* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *такве да за све* $m, n \in \mathbb{N}$: $f(2) = 2$, $f(mn) = f(m)f(n)$, $f(n+1) > f(n)$.

[K12] Канада 1969

2. *Доказати да не постоје цели бројеви* x *и* y *такви да је* $x^2 = y^5 - 4$.

[H15] Балканијада 1998

3. *Скуп* $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ *је подељен на* t *дисјунктних подскупова* $M_1, \ldots, M_t$. *Ако је* $n \geq \lfloor t! \cdot e \rfloor$, *показати да тада бар један подскуп* M_z *садржи три елемента* x_i, x_j, x_k *таква да је* $x_i - x_j = x_k$.

[O53] Шурова теорема

4. *Нека је* p *прост број облика* $4k+1$. *Показати да је*

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left(\left\lfloor \frac{2i^2}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{i^2}{p} \right\rfloor \right) = \frac{p-1}{2}.$$

[I11] Кореја 2000

5. (а) *Нека је са* $d(n)$ *означен број позитивних делилаца броја* n. *Доказати да не постоји број* $N \in \mathbb{N}$ *такав да је низ* $d(n^2+1)$ *строго монотон за* $n \geq N$.

(б) *Доказати да не постоји број* $N \in \mathbb{N}$ *такав да је низ* $d(n^2+1)$ *монотон за* $n \geq N$.

[J11] Санкт Петерсбург, 1998

6. *Нека су* a *и* b *природни бројеви такви да* $ab+1$ *дели* a^2+b^2. *Доказати да је*

$$\frac{a^2+b^2}{ab+1}$$

потпун квадрат.

[A3] ММО 1988/6

7. *Нека је p непаран прост број. Доказати да је*

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}.$$

[D2] Putnam 1991/B4

8. *Нека је n прост и нека су $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ цели бројеви. Доказати да је $a_1, a_2, \ldots, a_n$ аритметички низ ако и само ако постоји подела скупа $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots, \}$ на n скупова $A_1, A_2, \ldots, A_n$ таквих да је*

$$a_1 + A_1 = a_2 + A_2 = \ldots = a_n + A_n,$$

где је $x + A = \{x + a | a \in A\}$.

[O35] Румунија 1998

9. *Нека број m нема примитивни корен. Доказати да је*

$$a^{\frac{\varphi(m)}{2}} \equiv 1 \pmod{m}$$

за сваки број a који је релативно прост са m.

[B6]

10. *Доказати да је скуп свих петоцифрених бројева чији је децимални приказ пермутација цифара $1, 2, 3, 4, 5$ могуће поделити на два подскупа, таква да је сума квадрата елемената у сваком од њих једнака.*

[O49] Д. Фомин, [Ams, pp. 12]