

PROBLEMS IN ELEMENTARY NUMBER THEORY 1 (2008) NO. 1

PROBLEMS IN SERBIAN

1. Neka je sa $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ označen skup prirodnih brojeva. Naći sve funkcije $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ takve da za sve $m, n \in \mathbb{N}$: $f(2) = 2$, $f(mn) = f(m)f(n)$, $f(n+1) > f(n)$.

[K12] Kanada 1969

2. Dokazati da ne postoje celi brojevi x i y takvi da je $x^2 = y^5 - 4$.

[H15] Balkanijada 1998

3. Skup $M = \{1, 2, \dots, n\}$ je podeljen na t disjunktih podskupova M_1, \dots, M_t . Ako je $n \geq \lfloor t! \cdot e \rfloor$, pokazati da tada bar jedan podskup M_z sadrži tri elementa x_i, x_j, x_k takva da je $x_i - x_j = x_k$.

[O53] Šurova teorema

4. Neka je p prost broj oblika $4k + 1$. Pokazati da je

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left(\left\lfloor \frac{2i^2}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{i^2}{p} \right\rfloor \right) = \frac{p-1}{2}.$$

[I11] Koreja 2000

5. (a) Neka je sa $d(n)$ označen broj pozitivnih delilaca broja n . Dokazati da ne postoji broj $N \in \mathbb{N}$ takav da je niz $d(n^2 + 1)$ strogo monoton za $n \geq N$.
(b) Dokazati da ne postoji broj $N \in \mathbb{N}$ takav da je niz $d(n^2 + 1)$ monoton za $n \geq N$.

[J11] Sankt Petersburg, 1998

6. Neka su a i b prirodni brojevi takvi da $ab + 1$ deli $a^2 + b^2$. Dokazati da je

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

potpun kvadrat.

[A3] MMO 1988/6

7. Neka je p neparan prost broj. Dokazati da je

$$\sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}.$$

[D2] Putnam 1991/B4

8. Neka je n prost i neka su $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ celi brojevi. Dokazati da je a_1, a_2, \dots, a_n aritmetički niz ako i samo ako postoji podela skupa $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$ na n skupova A_1, A_2, \dots, A_n takvih da je

$$a_1 + A_1 = a_2 + A_2 = \dots = a_n + A_n,$$

gde je $x + A = \{x + a \mid a \in A\}$.

[O35] Rumunija 1998

9. Neka broj m nema primitivni koren. Dokazati da je

$$a^{\frac{\varphi(m)}{2}} \equiv 1 \pmod{m}$$

za svaki broj a koji je relativno prost sa m .

[B6]

10. Dokazati da je skup svih petocifrenih brojeva čiji je decimalni prikaz permutacija cifara 1, 2, 3, 4, 5 moguće podijeliti na dva podskupa, takva da je suma kvadrata elemenata u svakom od njih jednaka.

[O49] D. Fomin, [Ams, pp. 12]