PROBLEMS IN ELEMENTARY NUMBER THEORY 1 (2008) NO. 1

Problems in Vietnamese

1. *Gọi* $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ *là tập hợp các số nguyên dương. Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *thỏa mãn:* $f(2) = 2$, $f(mn) = f(m)f(n)$, $f(n+1) > f(n)$ *với mọi* $m, n \in \mathbb{N}$.

[K12] Canada 1969

2. *Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên* x *và* y *thỏa mãn* $x^2 = y^5 - 4$.

[H15] Balkan Mathematical Olympiad 1998

3. *Giả sử tập hợp* $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ *được chia thành* t *tập con không giao nhau* $M_1, \ldots, M_t$. *Chứng minh rằng nếu* $n \geq \lfloor t! \cdot e \rfloor$ *thì tồn tại ít nhất một tập con* M_z *chứa ba phần tử* x_i, x_j, x_k *có tính chất* $x_i - x_j = x_k$.

[O53] Schur Theorem

4. *Cho* p *là một số nguyên tố dạng* $4k+1$. *Chứng minh rằng:*

$$\sum_{i=1}^{p-1} \left(\left\lfloor \frac{2i^2}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{i^2}{p} \right\rfloor \right) = \frac{p-1}{2}.$$

[I11] Korea 2000

5. (a) *Ký hiệu* $d(n)$ *là số các ước số dương của* n. *Chứng minh rằng dãy số* $d(n^2+1)$ *không đơn điệu chặt từ một chỉ số nào đó.*

(b) *Chứng minh rằng* $d((n^2+1)^2)$ *không đơn điệu chặt từ bất kỳ chỉ số nào.*

[J11] Saint-Peterburg, 1998

6. *Cho* a *và* b *là hai số nguyên dương sao cho* $a^2 + b^2$ *chia hết cho* $ab + 1$. *Chứng minh rằng*

$$\frac{a^2 + b^2}{ab + 1}$$

là một số chính phương.

[A3] IMO 1988/6

7. *Giả sử p là một số nguyên tố lẻ. Chứng minh rằng*

$$\sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j}\binom{p+j}{j} \equiv 2^p + 1 \pmod{p^2}.$$

[D2] Putnam 1991/B4

8. *Cho số nguyên tố n và các số nguyên* $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. *Chứng minh rằng* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *là một cấp số cộng khi và chỉ khi tồn tại một cách chia tập hợp* $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots,\}$ *thành n tập hợp* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *sao cho*

$$a_1 + A_1 = a_2 + A_2 = \ldots = a_n + A_n,$$

trong đó $x + A = \{x + a | a \in A\}$.

[O35] Romania TST 1998

9. *Giả sử m không có căn nguyên thủy. Chứng minh rằng*

$$a^{\frac{\varphi(m)}{2}} \equiv 1 \pmod m$$

với mọi a nguyên tố cùng nhau với m.

[B6]

10. *Xét tập hợp tất cả các số thập phân có năm chữ số tạo thành bởi các chữ số* $1, 2, 3, 4, 5$ *được viết theo thứ tự bất kỳ. Chứng minh rằng tập hợp các số trên có thể chia thành hai nhóm sao cho tổng bình phương các số trong mỗi nhóm là bằng nhau.*

[O49] D. Fomin, [Ams, pp. 12]