PROBLEMS IN ELEMENTARY NUMBER THEORY 2 (2009) NO. 1

Problems in Vietnamese

1 (PEN K11). *(Canada 2002) Tìm tất cả các hàm số* $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ *sao cho với mọi* $m, n \in \mathbb{N}_0$ *ta có:*

$$mf(n) + nf(m) = (m+n)f(m^2+n^2).$$

Alexander Remorov (Canada)

2 (PEN I10). *Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố* p,

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{k^3}{p} \right\rfloor = \frac{(p+1)(p-1)(p-2)}{4}.$$

Cosmin Pohoata (Romania)

3 (PEN A14 A71). A14. *Gọi* n *là một số tự nhiên lớn hơn* 1. *Chứng minh rằng* $2^n - 1$ *không chia hết cho* n.

A71. *Tìm tất cả các số tự nhiên* $n > 1$ *sao cho*

$$\frac{2^n+1}{n^2}$$

là một số nguyên.

Daniel Kohen (Argentina)

4 (PEN N17). *Giả sử* a *và* b *là hai số thực khác nhau thỏa mãn:*

$$a-b,\ a^2-b^2, \cdots,\ a^k-b^k, \cdots$$

là các số nguyên. Chứng minh rằng a *và* b *cũng là các số nguyên.*

Ofir Gorodetsky (Israel)

5 (PEN D5 D6). D5. *Chứng minh rằng với* $n \geq 2$,

$$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n\ \text{thừa số}} \equiv \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n-1\ \text{thừa số}} \pmod{n}.$$

D6. *Chứng minh rằng, với mọi số nguyên cho trước* $n \geq 1$, *dãy số*

$$2,\ 2^2,\ 2^{2^2},\ 2^{2^{2^2}}, \cdots \pmod{n}$$

là hằng số kể từ số hạng nào đó.

Soo-Hong Lee (Korea), Harun Siljak (Bosnia and Herzegovina), Marin Misur (Croatia)

6 (PEN C2). *Cho hai số nguyên dương* a *và* b *sao cho các số* $15a+16b$ *và* $16a-15b$ *là các số chính phương. Giá trị nhỏ nhất của số nhỏ hơn trong hai số chính phương đó là bao nhiêu?*

Ho Chung Siu (Hong Kong)

7 (PEN A13)**.** *Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p,*

$$Q(p) = \prod_{k=1}^{p-1} k^{2k-p-1}$$

là một số nguyên.

Cosmin Pohoata (Romania)

8 (PEN A23, A24)**.** A23. *Chứng minh rằng nếu*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$

được viết dưới dạng phân số tối giản, trong đó $p > 3$ là một số nguyên tố, thì tử số của phân số này chia hết cho p^2.

A24. *Cho $p > 3$ là một số nguyên tố và $k = \left\lfloor \frac{2p}{3} \right\rfloor$. Chứng minh rằng*

$$\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{k}$$

chia hết cho p^2.

Daniel Kohen (Argentina)

9 (PEN E16)**.** *Chứng minh rằng với mọi số nguyên tố p thuộc khoảng* $\left] n, \frac{4n}{3} \right]$,

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^4$$

chia hết cho p.

Darij Grinberg (Germany)

10 (PEN A37, A9, O51)**.** A37. *Cho n là một số tự nhiên, chứng minh rằng*

$$(n+1)(n+2)\cdots(n+10)$$

không phải là một số chính phương.

A9. *Chứng minh rằng trong mười số nguyên dương liên tiếp tồn tại ít nhất một số nguyên tố cùng nhau với tích của các số còn lại.*

O51. *Chứng minh rằng trong 16 số nguyên liên tiếp ta luôn có thể tìm được một số nguyên tố cùng nhau với tất cả các số còn lại.*

Harun Siljak (Bosnia and Herzegovina)