

PROBLEMS IN ELEMENTARY NUMBER THEORY 2 (2009) NO. 1

PROBLEMS IN BANGLA

1 (PEN K11). (Canada 2002) এমন সকল ফাংশন $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ বের কর যাতে সকল $m, n \in \mathbb{N}_0$ এর জন্য নিচের সমীকরণটি সিদ্ধ হয়:

$$mf(n) + nf(m) = (m + n)f(m^2 + n^2).$$

Alexander Remorov (Canada)

2 (PEN I10). সকল মৌলিক সংখ্য p -এর জন্য দেখাও যে,

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{k^3}{p} \right\rfloor = \frac{(p+1)(p-1)(p-2)}{4}.$$

Cosmin Pohoata (Romania)

3 (PEN A14 A71). A14. যদি $n > 1$ একটি পূর্ণসংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $2^n - 1$, n দ্বারা বিভাজ্য নয়।

A71. সকল পূর্ণসংখ্যা $n > 1$ বের কর যেন,

$$\frac{2^n + 1}{n^2}$$

একটি পূর্ণসংখ্যা হয়।

Daniel Kohen (Argentina)

4 (PEN N17). ধরি, a এবং b এমন ভিন্ন ভিন্ন বাস্তব সংখ্যা যেন:

$$a - b, a^2 - b^2, \dots, a^k - b^k, \dots$$

সংখ্যাগুলো সবই পূর্ণসংখ্যা হয়। দেখাও যে, a এবং b নিজেরাও পূর্ণসংখ্যা।

Ofir Gorodetsky (Israel)

5 (PEN D5 D6). D5. সকল পূর্ণসংখ্যা $n \geq 2$ এর জন্য প্রমাণ কর যে,

$$\underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{n \text{ বার}} \equiv \underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{n-1 \text{ বার}} \pmod{n}.$$

D6. দেখাও যে, যেকোন নির্দিষ্ট পূর্ণসংখ্যা $n \geq 1$ এর জন্য নিচের অনুক্রমটি(সিকোয়েন্স) একসময় ধ্রুব অনুক্রম হবে:

$$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \dots \pmod{n}$$

Soo-Hong Lee (Korea), Harun Siljak (Bosnia and Herzegovina), Marin Misur (Croatia)

6 (PEN C2). a এবং b এমন দুটি পূর্ণসংখ্যা যাতে, $15a + 16b$ এবং $16a - 15b$ সংখ্যা দুই উভয়ই বর্গসংখ্যা। বর্গসংখ্যাদুটির মধ্যে ছোটটির সর্বনিম্ন মান কত?

Ho Chung Siu (Hong Kong)

7 (PEN A13). দেখাও যে সকল মৌলিক সংখ্যা p -এর জন্য,

$$Q(p) = \prod_{k=1}^{p-1} k^{2k-p-1}$$

একটি পূর্ণসংখ্যা।

Cosmin Pohoata (Romania)

8 (PEN A23, A24). A23.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$$

কে যদি একটি ভগ্নাংশ আকারে প্রকাশ করা হয়, যেখান $p > 3$ একটি মৌলিক সংখ্যা; তবে প্রমাণ কর যে, ঐ ভগ্নাংশের লব p^2 দ্বারা বিভাজ্য।

A24. যদি $p > 3$ একটি মৌলিক সংখ্যা এবং $k = \lfloor \frac{2p}{3} \rfloor$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{k}$$

p^2 দ্বারা বিভাজ্য।

Daniel Kohen (Argentina)

9 (PEN E16). যদি $p, \lfloor n, \frac{4n}{3} \rfloor$ ব্যবধির অন্তর্গত কোন মৌলিক সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে,

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^4$$

p দ্বারা বিভাজ্য।

Darij Grinberg (Germany)

10 (PEN A37, A9, O51). A37. যদি n একটি স্বাভাবিক সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে

$$(n+1)(n+2) \cdots (n+10)$$

সংখ্যাটি পূর্ণবর্গ সংখ্যা নয়।

A9. প্রমাণ কর যে, যেকোন দশটি ধারাবাহিক পূর্ণসংখ্যার অন্তত একটি সংখ্যা, অপর সংখ্যাগুলোর গুণফলের সাথে সহমৌলিক।

O51. প্রমাণ কর যে, যেকোন 16 টি ধারাবাহিক পূর্ণসংখ্যার ভেতর এমন একটি সংখ্যা পাওয়া যাবেই, যেটি অপর সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটির সাথে সহমৌলিক।

Harun Siljak (Bosnia and Herzegovina)