

PROBLEMS IN ELEMENTARY NUMBER THEORY 2 (2009) NO. 1

PROBLEMS IN CROATIAN

1 (PEN K11). Naći sve funkcije $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ takve da za svako $m, n \in \mathbb{N}_0$:

$$(1) \quad mf(n) + nf(m) = (m+n)f(m^2 + n^2).$$

Alexander Remorov (Kanada)

2 (PEN I10). Pokazati da za sve proste brojeve p ,

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{k^3}{p} \right\rfloor = \frac{(p+1)(p-1)(p-2)}{4}.$$

Cosmin Pohoata (Rumunjska)

3 (PEN A14 A71). A14 Neka je $n > 1$ prirodan broj. Pokazati da n ne dijeli

$$(3) \quad 2^n - 1$$

A71 Odrediti sve prirodne brojeve $n > 1$ takve da je

$$(4) \quad \frac{2^n + 1}{n^2}$$

prirodan broj.

Daniel Kohen (Argentina)

4 (PEN N17). Neka su a i b različiti realni brojevi takvi da su:

$$(5) \quad a - b, a^2 - b^2, \dots, a^k - b^k, \dots$$

svi cijeli brojevi. Pokazati da su a i b cijeli brojevi.

Ofir Gorodetsky (Izrael)

5 (PEN M16 D5 D6). M16 Niz a_n je definiran sa $a_1 = 3$ i $a_{i+1} = 3^{a_i}$ $f i \geq 1$. Koji se prirodni brojevi između 00 i 99 (00 i 99 uključeni) pojavljuju kao posljednje dvije znamenke u dekadskom zapisu beskonačno mnogo a_i ?

D5 Pokazati da za prirodni broj $n \geq 2$,

$$(6) \quad \underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{n \text{ članova}} \equiv \underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{n-1 \text{ članova}} \pmod{n}.$$

D6 Pokazati da za proizvoljno izabran prirodan broj $n \geq 1$ niz

$$(7) \quad 2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \dots \pmod{n}$$

predstavlja niz konstanti počev od nekog indeksa.

Soo-Hong Lee (Južna Koreja), Harun Šiljak (Bosna i Hercegovina), Marin Mišur (Hrvatska)

6 (PEN C2). Za prirodne brojeve a i b vrijedi da su $15a + 16b$ i $16a - 15b$ kvadrati prirodnih brojeva. Koja je najmanja moguća vrijednost koju može imati manji od ova dva kvadrata?

Ho Chung Siu (Hong Kong)

7 (PEN A13). Pokazati da je za svaki prost broj p ,

$$Q(p) = \prod_{k=1}^{p-1} k^{2k-p-1}$$

cio broj.

Cosmin Pohoata (Rumunjska)

8 (PEN A23, A24). A23. Pokazati da ako je $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$ izražen u obliku razlomka, gdje je $p > 3$ prost broj, tada je brojitelj ovog razlomka djeljiv sa p^2 .

A24. Neka je $p > 3$ prost broj i $k = \lfloor \frac{2p}{3} \rfloor$. Pokazati da je $\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{k}$ djeljivo sa p^2 .

Daniel Kohen (Argentina)

9 (PEN E16). Dokazati da svaki prost broj p iz intervala $\left] n, \frac{4n}{3} \right]$, p dijeli

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^4.$$

Darij Grinberg (Njemačka)

10 (PEN A37, A9, O51). A37. Ako je n prirodan broj, pokazati da broj $(n+1)(n+2) \dots (n+10)$ nije potpun kvadrat.

A9. Pokazati da u bilo kom nizu 10 uzastopnih prirodnih brojeva postoji broj uzajamno prost sa umnoškom ostalih članova tog niza.

O51. Pokazati da u bilo kom nizu 16 uzastopnih prirodnih brojeva postoji broj uzajamno prost sa svim ostalim brojevima u tom nizu.

Harun Šiljak (Bosna i Hercegovina)