

PROBLEMS IN ELEMENTARY NUMBER THEORY 2 (2009) NO. 1

PROBLEMS IN SERBIAN

1 (PEN K11). *Наћи све функције $f : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ такве да за свако $m, n \in \mathbb{N}_0$:*

$$(1) \quad mf(n) + nf(m) = (m+n)f(m^2 + n^2).$$

Alexander Remorov (Канада)

2 (PEN I10). *Показати да за све просте бројеве p ,*

$$(2) \quad \sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{k^3}{p} \right\rfloor = \frac{(p+1)(p-1)(p-2)}{4}.$$

Cosmin Pohoata (Румунија)

3 (PEN A14 A71). *A14 Нека је $n > 1$ природан број. Показати да n не дели*

$$(3) \quad 2^n - 1$$

A71 Одредити све природне бројеве $n > 1$ такве да је

$$(4) \quad \frac{2^n + 1}{n^2}$$

природан број.

Daniel Kohen (Аргентина)

4 (PEN N17). *Нека су a и b различити реални бројеви такви да су:*

$$(5) \quad a - b, a^2 - b^2, \dots, a^k - b^k, \dots$$

сви цели бројеви. Показати да су a и b цели бројеви.

Ofir Gorodetsky (Израел)

5 (PEN M16 D5 D6). *M16 Низ a_n је дефинисан са $a_1 = 3$ и $a_{i+1} = 3^{a_i}$, $i \geq 1$. Који се природни бројеви између 00 и 99 (00 и 99 укључени) појављују као последње две цифре у декадском запису бесконачно много a_i ?*

D5 Показати да за природни број $n \geq 2$,

$$(6) \quad \underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{n \text{ чланова}} \equiv \underbrace{2^{2^{\dots^2}}}_{n-1 \text{ чланова}} \pmod{n}.$$

D6 Показати да за произвољно изабран природан број $n \geq 1$ низ

$$(7) \quad 2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \dots \pmod{n}$$

представља низ константи почев од неког индекса.

Soo-Hong Lee (Јужна Кореја), Harun Šiljak (Босна и Херцеговина), Marin Mišur (Хрватска)

6 (PEN C2). За природне бројеве a и b вреди да су $15a + 16b$ и $16a - 15b$ квадрати природних бројева. Која је најмања могућа вредност коју може имати мањи од ова два квадрата?

Ho Chung Siu (Хонг Конг)

7 (PEN A13). Показати да је за сваки прост број p ,

$$Q(p) = \prod_{k=1}^{p-1} k^{2k-p-1}$$

цео број.

Cosmin Pohoata (Румунија)

8 (PEN A23, A24). A23. Показати да ако је $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$ изражен у облику разломка, где је $p > 3$ прост број, тада је бројник овог разломка дељив са p^2 .

A24. Нека је $p > 3$ прост број и $k = \lfloor \frac{2p}{3} \rfloor$. Показати да је $\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \dots + \binom{p}{k}$ дељиво са p^2 .

Daniel Kohen (Аргентина)

9 (PEN E16). Доказати да сваки прост број p из интервала $\left] n, \frac{4n}{3} \right]$ дели

$$\sum_{j=0}^n \binom{n}{j}^4.$$

Darij Grinberg (Немачка)

10 (PEN A37, A9, O51). A37. Ако је n природан број, показати да број $(n+1)(n+2)\dots(n+10)$ није потпун квадрат.

A9. Показати да у било ком низу 10 узастопних природних бројева постоји број релативно прост са производом осталих чланова тог низа.

O51. Показати да у било ком низу 16 узастопних природних бројева постоји број релативно прост са свим осталим бројевима у том низу.

Harun Šiljak (Босна и Херцеговина)