# PROBLEMS IN ELEMENTARY NUMBER THEORY 2 (2009) NO. 1

## Problems in Serbian

**1** (PEN K11). *Naći sve funkcije $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ takve da za svako $m, n \in \mathbb{N}_0$:*

$$mf(n) + nf(m) = (m + n)f(m^2 + n^2). \tag{1}$$

Alexander Remorov (Kanada)

**2** (PEN I10). *Pokazati da za sve proste brojeve $p$,*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{k^3}{p} \right\rfloor = \frac{(p+1)(p-1)(p-2)}{4}. \tag{2}$$

Cosmin Pohoata (Rumunija)

**3** (PEN A14 A71). *A14 Neka je $n > 1$ prirodan broj. Pokazati da $n$ ne deli*

$$2^n - 1 \tag{3}$$

*A71 Odrediti sve prirodne brojeve $n > 1$ takve da je*

$$\frac{2^n + 1}{n^2} \tag{4}$$

*prirodan broj.*

Daniel Kohen (Argentina)

**4** (PEN N17). *Neka su $a$ i $b$ različiti realni brojevi takvi da su:*

$$a - b, a^2 - b^2, \cdots, a^k - b^k, \cdots \tag{5}$$

*svi celi brojevi. Pokazati da su $a$ i $b$ celi brojevi.*

Ofir Gorodetsky (Izrael)

**5** (PEN M16 D5 D6). *M16 Niz $a_n$ je definisan sa $a_1 = 3$ i $a_{i+1} = 3^{a_i}$ f $i \geq 1$. Koji se prirodni brojevi izmedju 00 i 99 (00 i 99 uključeni) pojavljuju kao poslednje dve cifre u dekadskom zapisu beskonačno mnogo $a_i$?*
*D5 Pokazati da za prirodni broj $n \geq 2$,*

$$\underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{n \text{ članova}} \equiv \underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{n-1 \text{ članova}} \pmod{n}. \tag{6}$$

*D6 Pokazati da za proizvoljno izabran prirodan broj $n \geq 1$ niz*

$$2,\ 2^2,\ 2^{2^2},\ 2^{2^{2^2}}, \cdots \pmod{n} \tag{7}$$

*predstavlja niz konstanti počev od nekog indeksa.*

Soo-Hong Lee (Južna Koreja), Harun Šiljak (Bosna i Hercegovina), Marin Mišur (Hrvatska)

**6** (PEN C2)**.** *Za prirodne brojeve $a$ i $b$ vredi da su $15a+16b$ i $16a-15b$ kvadrati prirodnih brojeva. Koja je najmanja moguća vrednost koju može imati manji od ova dva kvadrata?*

Ho Chung Siu (Hong Kong)

**7** (PEN A13)**.** *Pokazati da je za svaki prost broj $p$,*

$$Q(p) = \prod_{k=1}^{p-1} k^{2k-p-1}$$

*ceo broj.*

Cosmin Pohoata (Rumunija)

**8** (PEN A23, A24)**.** A23. *Pokazati da ako je $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p-1}$ izražen u obliku razlomka, gde je $p>3$ prost broj, tada je brojnik ovog razlomka deljiv sa $p^2$.*

A24. *Neka je $p>3$ prost broj i $k=\lfloor\frac{2p}{3}\rfloor$ Pokazati da je $\binom{p}{1}+\binom{p}{2}+\cdots+\binom{p}{k}$ deljivo sa $p^2$.*

Daniel Kohen (Argentina)

**9** (PEN E16)**.** *Dokazati da svaki prost broj $p$ iz intervala $\left]n, \dfrac{4n}{3}\right]$ deli*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^4.$$

Darij Grinberg (Nemačka)

**10** (PEN A37, A9, O51)**.** A37. *Ako je $n$ prirodan broj, pokazati da broj $(n+1)(n+2)\cdots(n+10)$ nije potpun kvadrat.*
A9. *Pokazati da u bilo kom nizu 10 uzastopnih prirodnih brojeva postoji broj relativno prost sa proizvodom ostalih članova tog niza.*
O51. *Pokazati da u bilo kom nizu 16 uzastopnih prirodnih brojeva postoji broj relativno prost sa svim ostalim brojevima u tom nizu.*

Harun Šiljak (Bosna i Hercegovina)