PROBLEMS IN ELEMENTARY NUMBER THEORY 2 (2009) NO. 1

Problems in Greek

1. *[PEN K11] (Canada 2002) Βρείτε όλες τις συναρτήσεις $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ έτσι ώστε για όλα τα $m, n \in \mathbb{N}_0$ να ισχύει:*

$$mf(n) + nf(m) = (m+n)f(m^2+n^2). \tag{1}$$

Alexander Remorov (Canada)

2. *[PEN I10] Δείξτε ότι για όλους τους πρώτους p ισχύει ότι,*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left\lfloor \frac{k^3}{p} \right\rfloor = \frac{(p+1)(p-1)(p-2)}{4}. \tag{2}$$

Cosmin Pohoata (Romania)

3. *[PEN A14 A71] A14 Έστω ένας ακέραιος $n > 1$. Δείξτε ότι ο n δεν διαιρεί τον*

$$2^n - 1 \tag{3}$$

A71 Προσδιορίστε όλους τους ακεραίους $n > 1$ που είναι τέτοιοι ώστε ο αριθμός

$$\frac{2^n+1}{n^2} \tag{4}$$

να είναι ακέραιος.

Daniel Kohen (Argentina)

4. *[PEN N17] Υποθέτουμε ότι ο a και ο b είναι διαφορετικοί πραγματικοί αριθμοι ώστε οι αριθμοι :*

$$a-b, a^2-b^2, \cdots, a^k-b^k, \cdots \tag{5}$$

να είναι όλοι ακέραιοι. Δείξτε ότι ο a και ο b είναι ακέραιοι.

Ofir Gorodetsky (Israel)

5. *[PEN D5 D6] D5 Δείξτε ότι για κάθε ακέραιο $n \geq 2$,*

$$\underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n\ \text{όροι}} \equiv \underbrace{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}_{n-1\ \text{όροι}} \pmod{n}. \tag{6}$$

D6 Δείξτε ότι για κάθε σταθερό ακέραιο $n \geq 1$ η ακολουθία

$$2,\ 2^2,\ 2^{2^2},\ 2^{2^{2^2}}, \cdots \pmod{n} \tag{7}$$

είναι τελικά σταθερή.

Soo-Hong Lee (Korea), Harun Siljak (Bosnia and Herzegovina), Marin Misur (Croatia)

6. *[PEN C2] Οι θετικοί ακέραιοι* a *και* b *είναι τέτοιοι ώστε οι αριθμοί* $15a + 16b$ *και* $16a - 15b$ *να είναι και οι δύο τέλεια τετράγωνα ακεραίων. Βρείτε την ελάχιστη τιμή που μπορεί να πάρει ο μικροτέρος από τα δύο τέλεια τετράγωνα.*

Ho Chung Siu (Hong Kong)

7. *[PEN A13] Δείξτε ότι για όλους τους πρώτους* p, *ο*

$$Q(p) = \prod_{k=1}^{p-1} k^{2k-p-1}$$

είναι ακέραιος.

Cosmin Pohoata (Romania)

8. *[PEN A23, A24]* A23. *Αποδείξτε ότι αν ο αριθμός* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$ *γράφεται σαν ανάγωγο κλάσμα, όπου* $p > 3$ *είναι ένας πρώτος , τότε ο* p^2 *διαιρεί τον αριθμητή του κλάσματος.*

A24. *Έστω* $p > 3$ *ένας πρώτος και* $k = \lfloor \frac{2p}{3} \rfloor$. *Αποδείξτε ότι ο* $\binom{p}{1} + \binom{p}{2} + \cdots + \binom{p}{k}$ *διαιρείται από* p^2.

Daniel Kohen (Argentina)

9. *[PEN E16] Αποδείξτε ότι για κάθε πρώτο* p *που βρίσκεται στο διάστημα* $\left]n, \dfrac{4n}{3}\right]$, *ο* p *διαιρεί το*

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^4.$$

Darij Grinberg (Germany)

10. *[PEN A37, A9, O51]* A37. *Αν ο* n *είναι ένας φυσικός αριθμός , αποδείξτε ότι ο αριθμός* $(n + 1)(n + 2) \cdots (n + 10)$ *δεν είναι τέλειο τετράγωνο ακεραίου.*
A9. *Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε οποιουσδήποτε δέκα διαδοχικούς θετικούς ακεραίους τουλάχιστον ένας είναι σχετικά πρώτος με το γινόμενο των άλλων .*
O51. *Αποδείξτε ότι ανάμεσα σε 16 διαδοχικούς ακεραίους μπορούμε πάντα να βρούμε έναν ο οποίος είναι σχετικά πρώτος με τους υπόλοιπους .*

Harun Siljak (Bosnia and Herzegovina)